

Publications
électroniques
AMURE

Série
DOCUMENTS
DE TRAVAIL



Les filiations trompeuses : du modèle
logistique à la suite logistique.
Note sur la discrétisation du modèle de
Verhulst

Jean BONCOEUR
Université de Bretagne Occidentale
UMR 6308 AMURE

N° D-49-2026

ISSN 1951-641X

Amure
CENTRE DE DROIT ET D'ÉCONOMIE DE LA MER

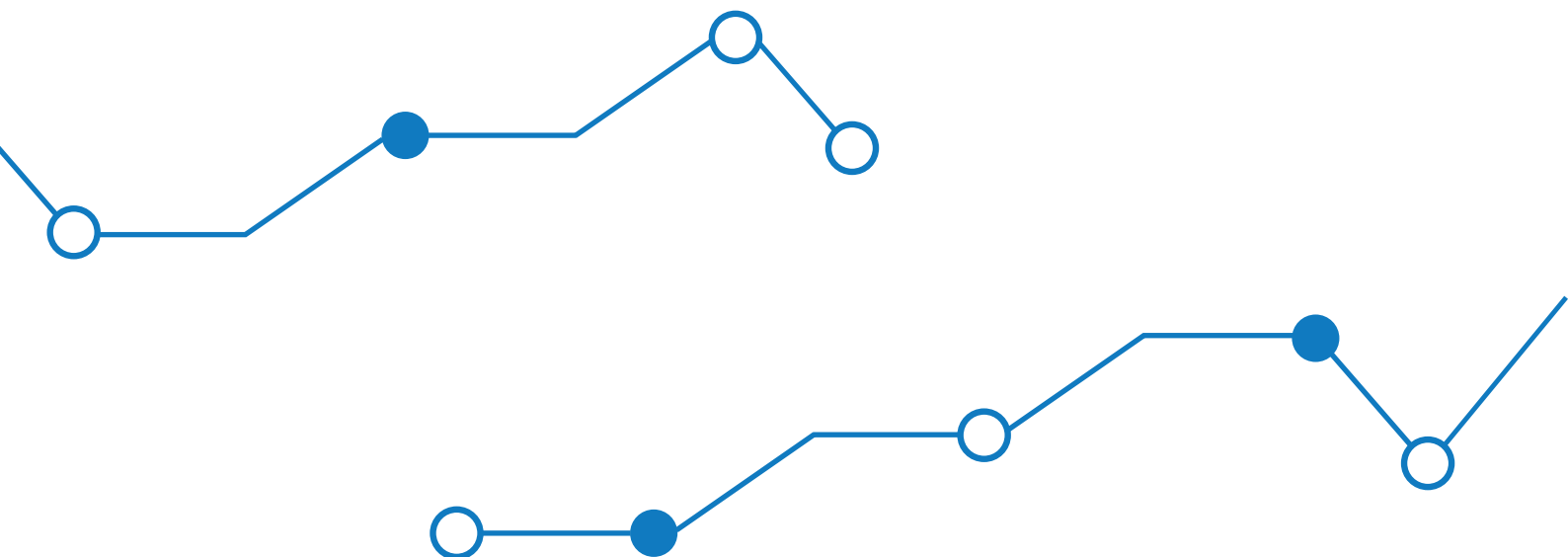
www.umr-amure.fr

UBO
Université de Bretagne Occidentale

Ifremer

cnrs

IRD



Pour citer ce document

Boncoeur J. (2026) [online] « Les filiations trompeuses : du modèle logistique à la suite logistique Note sur la discrétisation du modèle de Verhulst », Publications électroniques Amure, Série Documents de travail D-49-2026, 7p. Disponible : https://www.umr-amure.fr/d_49_2026/ (Consulté le jj.mm.aaaa*)

*Indiquez la date à laquelle vous avez consulté le document en ligne

Les filiations trompeuses : du modèle logistique à la suite logistique

Note sur la discrétisation du modèle de Verhulst

Jean Boncoeur
Université de Bretagne Occidentale / UMR 6308 AMURE

Document de travail, décembre 2025

Résumé

Souvent présentée comme la version discrète du modèle de dynamique des populations de Verhulst, l'équation de récurrence connue sous le nom de suite logistique se comporte dans certaines circonstances très différemment de ce modèle. Nous montrons que ce phénomène ne résulte pas de la discrétisation du modèle de Verhulst, mais du fait que l'équation de récurrence issue de cette discrétisation n'est pas la suite logistique.

Introduction

Connue sous le nom de suite logistique, la suite réelle :

$$(1) \quad u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$$

suscite, depuis l'article que lui a consacré le biologiste Robert May en 1976, un vif intérêt par le contraste qu'elle offre entre sa grande simplicité formelle et sa capacité à générer des dynamiques très complexes. Elle constitue notamment une porte d'entrée pour l'étude de la théorie du chaos (voir par exemple Perrin, 2019).

La suite logistique est ainsi nommée en référence au modèle de dynamique des populations proposé en 1838 par Pierre François Verhulst, qui a appelé en 1845 « courbe logistique » la représentation graphique de son modèle (lui-même couramment désigné aujourd'hui sous l'appellation de modèle logistique). Cette référence se fonde sur la proximité de l'équation aux différences finies résultant de (1) et de l'équation différentielle du modèle de Verhulst.

La similitude des deux équations conduit fréquemment à voir dans la suite logistique la version discrète du modèle en temps continu de Verhulst¹. Il existerait alors entre les deux modèles une relation du même ordre que celle qui unit le modèle de Malthus au modèle exponentiel. Toutefois, ce parallèle est contredit par le fait que la suite logistique et le modèle de Verhulst peuvent produire des résultats radicalement différents, ce qui, au delà de leur ressemblance formelle, conduit à questionner leur parenté réelle.

De Malthus à Verhulst, en passant par le modèle exponentiel

Le modèle de Verhulst constitue une critique du modèle de dynamique des populations proposé en 1798 par Malthus dans son *Essai sur le principe de population*. Dans cet essai, Malthus fait l'hypothèse qu'une population animale ou végétale croît naturellement selon une progression géométrique jusqu'à ce qu'elle se heurte à la barrière des

¹ Cette interprétation se rencontre dans de nombreux documents consultables en ligne. Nous nous bornons ici à mentionner les pages Wikipedia relatives au sujet. Sur la page « Suite logistique », on peut lire que cette suite « est la solution en temps discret du modèle de Verhulst ». La page « Modèle logistique » énonce qu'en temps discret, ce modèle « se transforme » en une équation de récurrence qui est celle de la suite logistique. La page « Logistic map » (en anglais) utilise une formulation plus ambivalente : « [The logistic map] was popularized... as a discrete-time model analogous to the logistic equation written down by Pierre François Verhulst ».

subsistances, de l'espace, ou d'autres conditions extérieures. Tant que cette contrainte n'est pas limitante, l'hypothèse de Malthus peut s'écrire :

$$(2) \quad x_{t+1} = (1 + g)x_t$$

où t est un entier naturel, x_t la taille de la population (en termes d'effectif ou de biomasse) à la date t et g le taux de croissance naturel de cette population, dépendant de ses caractéristiques intrinsèques. Pour un niveau $x_0 > 0$ représentant la taille de la population à une date ($t = 0$) choisie comme origine, la résolution de l'équation de récurrence ci-dessus donne :

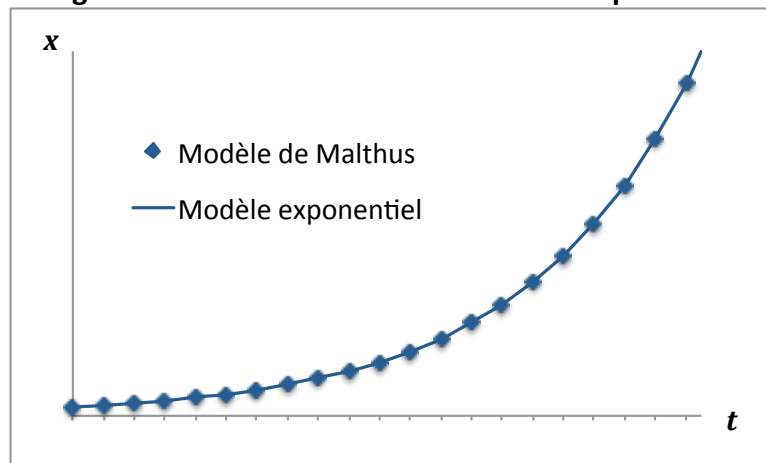
$$(3) \quad x_t = x_0(1 + g)^t$$

Le modèle de Malthus est un modèle en temps discret. Le passage à un raisonnement en temps continu transforme l'équation ci-dessus en :

$$(4) \quad x(t) = x_0 e^{rt}$$

où $r = \ln(1 + g)$ est le taux instantané $x'(t)/x(t)$ équivalent au taux discret $g = (x_{t+1} - x_t)/x_t$. Le terme « équivalent » signifie ici que, pour des valeurs entières de t , les équations (3) et (4) donnent, en toutes circonstances, les mêmes valeurs de x (figure 1). Le modèle exponentiel décrit par la relation (4) est donc la reformulation en temps continu du modèle de Malthus et, réciproquement, ce dernier peut être défini comme la version discrète du modèle exponentiel.

Figure 1. Modèle de Malthus et modèle exponentiel



Par rapport au modèle de Malthus, Verhulst introduit deux nouveautés, l'une de forme et l'autre de fond. La nouveauté formelle consiste à raisonner directement en temps continu. Sur le fond, Verhulst innove en faisant apparaître à l'intérieur de son modèle la contrainte environnementale qui restait extérieure au modèle malthusien. Il introduit pour cela, à côté du taux de croissance instantané du modèle exponentiel, un second paramètre représentant la taille maximale de la population que peut accueillir durablement le milieu dans lequel elle évolue. Ces deux paramètres sont aujourd'hui appelés « taux de croissance intrinsèque » et « capacité de charge », et habituellement symbolisés par les lettres r et K (voir par exemple Clark, 1990).

Appelée aujourd'hui hypothèse de compensation (Ibid.), l'hypothèse principale de Verhulst est que, dans des conditions environnementales données, le taux d'accroissement instantané d'une population varie en sens inverse de la taille x de cette population : proche de r lorsque x est petit par rapport à K , il diminue progressivement au fur et à mesure que x grandit (l'environnement devenant de plus en plus limitant), et

tend vers zéro lorsque x approche de K . Verhulst suppose en outre, à titre de simplification, que cette relation est linéaire. L'équation différentielle suivante formalise ces deux hypothèses :

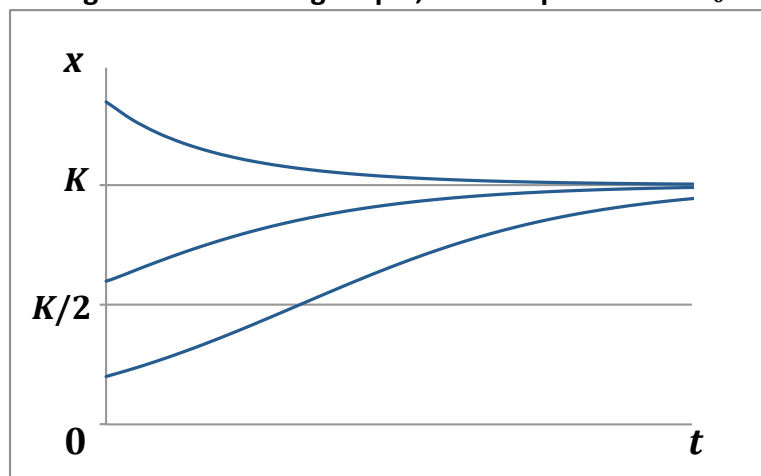
$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Sa résolution, pour une taille donnée $x_0 > 0$ de la population en $(t = 0)$, conduit à la loi de variation temporelle suivante :

$$(6) \quad x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

La courbe représentative de l'équation (6) dépend de la position de x_0 par rapport à K (figure 2).

Figure 2. Courbe logistique, selon la position de x_0



Suite logistique et modèle de Verhulst

En indexant la suite logistique sur le temps et en posant :

$$r = a - 1 \quad \text{et} \quad \frac{x_t}{K} = \frac{a}{a-1} u_n$$

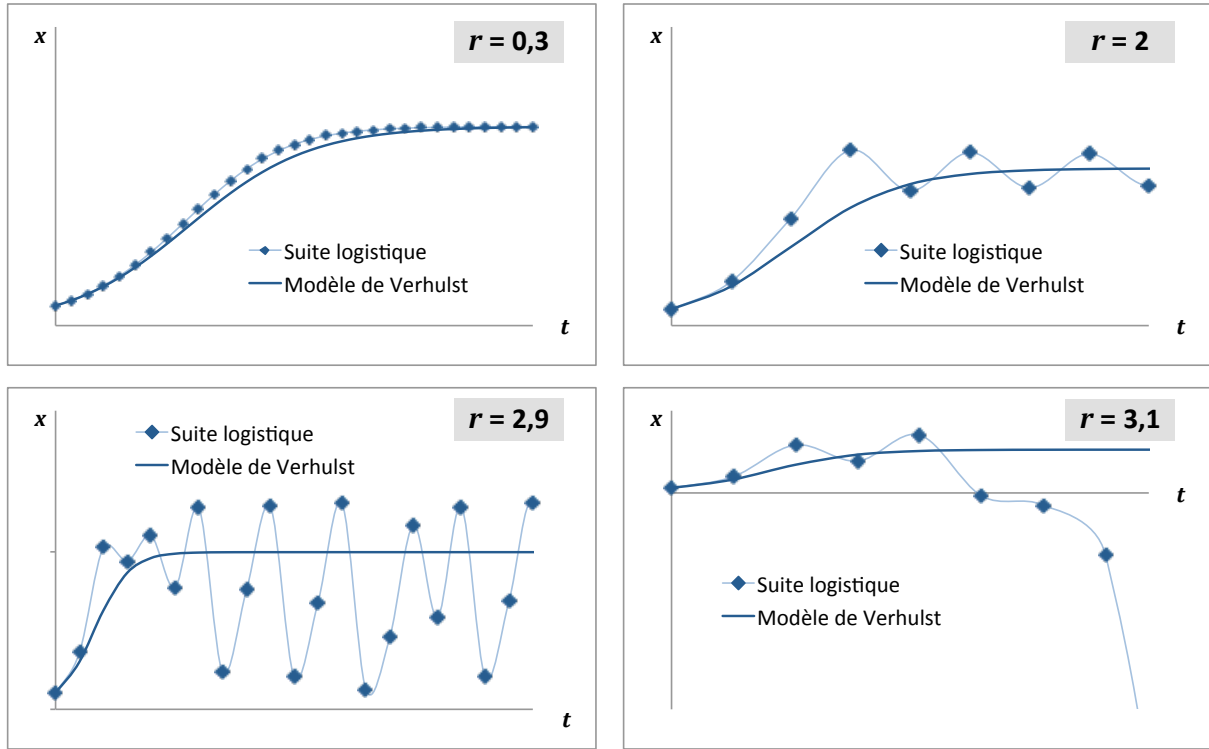
on peut réécrire (1) sous la forme :

$$(7) \quad x_{t+1} - x_t = rx_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right)$$

La similitude formelle de cette équation aux différences finies et de l'équation différentielle (5) du modèle de Verhulst est à l'origine de l'appellation « suite logistique ». Elle est également à l'origine de l'interprétation selon laquelle la suite ainsi nommée serait la version discrète du modèle en temps continu de Verhulst. Cette interprétation doit cependant affronter le fait que le comportement de la suite logistique présente des propriétés inédites par rapport au modèle dont elle est censée être la version discrète (May, 1976). En effet, alors que dans le modèle de Verhulst la population converge de façon monotone vers la capacité de charge en toutes circonstances dès lors que $r > 0$ et $x_0 > 0$, cette propriété n'est vérifiée par la suite logistique que si $r < 1$. Au-delà de ce seuil, le comportement de la suite logistique s'écarte de plus en plus de celui du modèle de Verhulst au fur-et-à-mesure que l'on augmente r : dans un premier temps la convergence de la suite logistique vers K s'opère à travers une série d'oscillations, puis les oscillations cessent d'être convergentes, puis la

suite devient chaotique. Au-delà de $r = 3$, la suite sort du domaine de non-négativité (figure 3).

Figure 3. Suite logistique et modèle de Verhulst pour différentes valeurs de r



La divergence entre les comportements des deux modèles indique qu'ils n'entretiennent pas une relation aussi simple que celle qui unit le modèle de Malthus au modèle exponentiel. L'interprétation courante faisant de la suite logistique la version discrète du modèle de Verhulst ne facilite pas la compréhension de ce phénomène². Mais la difficulté disparaît si l'on reconnaît que cette interprétation est incorrecte.

Discretisation du modèle de Verhulst

La façon la plus simple de discrétiser une équation différentielle, c'est-à-dire de la transformer en une équation aux différences finies, est la méthode d'Euler. Celle-ci consiste à approximer, pour un pas de temps Δt donné, la dérivée dx/dt par l'expression :

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

dont dx/dt est, par définition, la limite lorsque Δt tend vers zéro. Appliquée au modèle de Verhulst, la méthode d'Euler transforme l'équation (5) en :

$$x_{n+1} = x_n + r\Delta t x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

où n est un entier naturel, et x_n représente la valeur de x en $t = n\Delta t$. Pour $\Delta t = 1$, l'équation ci-dessus devient :

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

² « Le continu, c'est plus simple que le discret » écrit D. Perrin, reprenant une formule attribuée au mathématicien G.D. Birkhoff (Perrin, 2019).

ce qui n'est autre que l'équation (7) de la suite logistique. Au-delà de la proximité formelle existant entre les équations (5) et (7), la transformation de l'une en l'autre par la méthode d'Euler est souvent invoquée pour justifier l'interprétation faisant de la suite logistique la version discrète du modèle de Verhulst³.

Mais cette justification reste fragile car, du fait de l'approximation sur laquelle repose la méthode d'Euler, les valeurs produites par le modèle discrétisé ne sont pas identiques à celles du modèle continu. D'autant plus importante que le pas de temps utilisé est grand, l'erreur résultant de cette approximation peut, dans certaines circonstances, conduire le modèle discrétisé par la méthode d'Euler à se comporter très différemment du modèle continu d'origine (voir par exemple Peterson, 2017) – ce qui, en l'espèce, est bien le cas lorsque r est suffisamment élevé⁴.

Cet inconvénient peut être évité si, au lieu de discrétiser de façon approximative l'équation différentielle (5) au moyen de la méthode d'Euler, on procède à partir de l'équation (6), qui est la solution de (5) pour une valeur initiale x_0 donnée. Appelons $g = e^r - 1$ le taux discret équivalent au taux instantané r , et posons $b = (K/x_0) - 1$. Avec ces notations, l'équation (6) peut s'écrire, pour $t \in \mathbb{N}$:

$$x_t = \frac{K}{1 + b(1 + g)^{-t}} = \frac{K(1 + g)^t}{(1 + g)^t + b}$$

En écrivant cette équation avec les mêmes notations pour $t + 1$ et en soustrayant x_t de x_{t+1} , on obtient :

$$x_{t+1} - x_t = \frac{gbK(1 + g)^t}{[(1 + g)^{t+1} + b][(1 + g)^t + b]}$$

d'où :

$$\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = \frac{gb}{(1 + g)^{t+1} + b} = g \left(1 - \frac{x^{t+1}}{K} \right)$$

et par suite :

$$x_{t+1} - x_t = gx_t \left(1 - \frac{x^{t+1}}{K} \right)$$

L'équation ci-dessus ressemble à l'équation (7), à deux différences près : le taux instantané r est remplacé par son équivalent discret g , et le numérateur du ratio figurant dans la parenthèse du membre de droite de l'équation n'est pas x^t mais x^{t+1} . En réarrangeant ses termes, on obtient :

$$(9) \quad x_{t+1} = \frac{(1 + g)x_t}{1 + g \frac{x_t}{K}}$$

Quel que soit le taux $g > 0$, l'équation de récurrence ci-dessus converge vers K de façon monotone à partir d'une position de départ $x_0 > 0$ quelconque (figure 4), et reproduit de façon fidèle le mouvement de la courbe logistique (figure 5).

³ Voir par exemple la page Wikipedia « Logistic map ». La méthode à laquelle on se réfère ici est la méthode d'Euler « classique », ou « explicite ». Une variante est la méthode d'Euler « implicite », consistant à approximer dx/dt par $[x(t) - x(t - \Delta t)]/\Delta t$. On vérifie aisément que la méthode implicite appliquée au modèle de Verhulst débouche sur une équation de récurrence très différente de celle de la suite logistique.

⁴ Ce problème est signalé dans la page Wikipedia « Logistic map », mais pas dans les pages « Suite logistique » et « Modèle de Verhulst », qui ne mentionnent pas la méthode de discrétisation utilisée pour passer du modèle de Verhulst à la suite logistique. Intitulée « Logistic function », la page en langue anglaise consacrée au modèle de Verhulst n'aborde pas la question de la discrétisation de ce modèle.

Figure 4. Convergence du modèle de Verhulst discrétisé

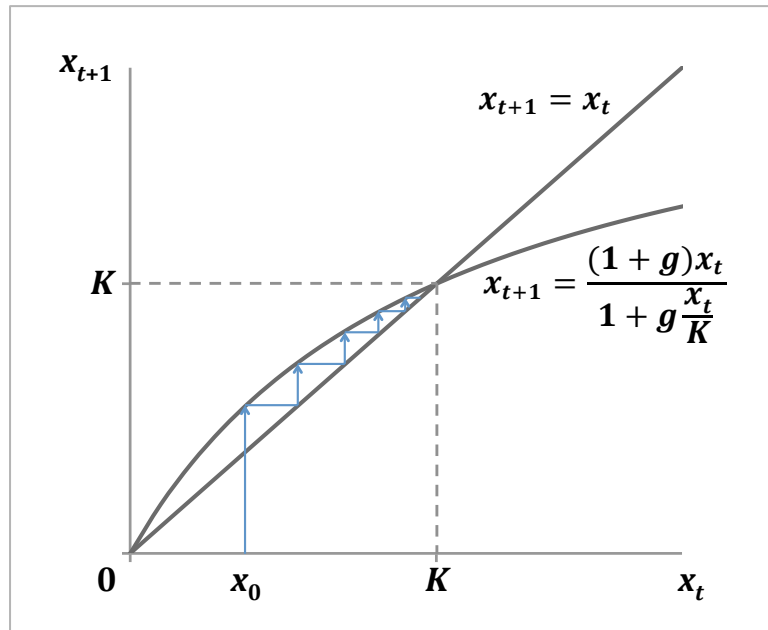
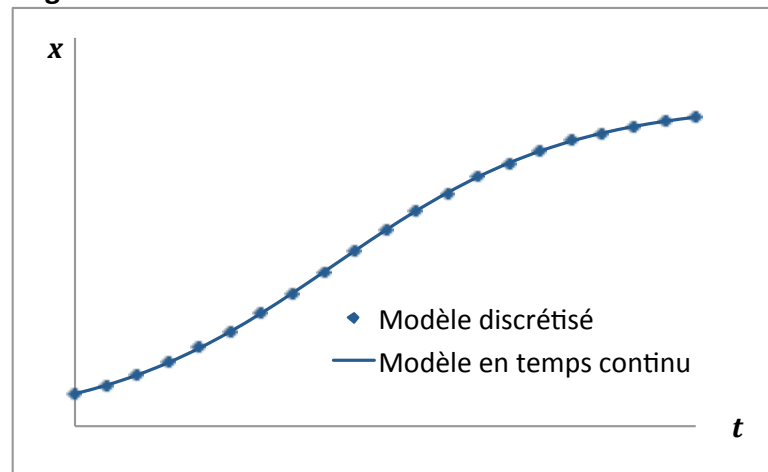


Figure 5. Le modèle de Verhulst et sa version discrétisée



Tout comme le modèle de Malthus est la version discrète du modèle exponentiel, le modèle constitué par l'équation (9) est la version discrète du modèle de Verhulst, ce que n'est la suite logistique que par abus de langage. Ce n'est donc pas dans les complications jalonnant le passage du continu au discret qu'il faut chercher l'explication de la différence de comportement constatée entre le modèle de Verhulst et la suite logistique mais, plus prosaïquement, dans le fait que celle-ci n'est pas la version discrète de celui-là.

Références citées

- Clark C.W. (1990) *Mathematical Bioeconomics. The optimal management of renewable resources*, 2^e édition, John Wiley & Sons, New York.
- Malthus T.R. (1798) *Essai sur le principe de population*, traduction française Guillaumin, Paris, 1889.
- May R.M. (1976) "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature*, vol. 261, 10 juin 1976, p. 459-467.

Perrin D. (2019) *La suite logistique et le chaos*, Laboratoire de Mathématique d'Orsay, 63 p. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr>

Peterson J. (2017) "Introduction to discretization", Florida State University, Department of Scientific Computing, 61 p. <https://people.sc.fsu.edu>

Verhulst P.F. (1838) « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement », *Correspondance mathématique et physique*, n°10, p.113-121.

Wikipedia (en anglais) : pages « Logistic map » et « Logistic function » en.wikipedia.org

Wikipedia (en français) : pages « Suite logistique » et « Modèle de Verhulst » fr.wikipedia.org

An abstract graphic divided into four quadrants by a white cross. The top-left quadrant is teal, the top-right is dark blue, the bottom-left is white, and the bottom-right is lime green. A white line art path with circular nodes is overlaid on the quadrants. The path starts in the teal quadrant, moves to the dark blue quadrant, then to the lime green quadrant, and finally returns to the teal quadrant. The nodes are represented by white circles, some filled and some hollow. The lines are white and connect the nodes in a continuous path.

A decorative graphic consisting of white lines and circles on a background split into dark blue (top) and light green (bottom) sections. The lines and circles form an abstract, circuit-like pattern.



www.umr-amure.fr

